Yatay asimptot

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\infty}}{\infty} = 0 \qquad y=0 \ +\infty \text{ kolda yatay asimptottur}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\infty}}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{"L.Hop"} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)\,e^{-x+2}}{1} = -\infty$$

$-\infty$ kolda yatay asimptot yoktur.

$-\infty$ kolda eğik asimptot bakabiliriz.

$y=cx+d$ eğik asimptot ise

$$c = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+2}}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1)\,e^{-x+2}}{2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+2}}{2} = +\infty$$

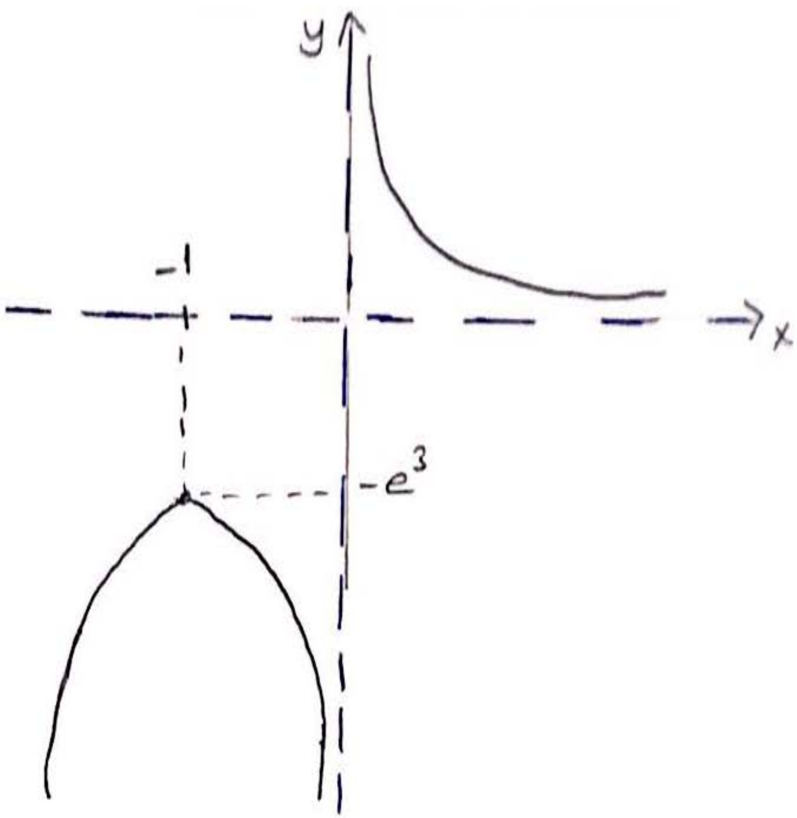
$-\infty$ kolda eğri asimptot yoktur.

$A(1, e)$ , $B(2, \frac{1}{2})$ kesim noktaları

$$f'(x) = \frac{-e^{-x+2} \cdot x - e^{-x+2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{-x+2}(-x-1)}{x^2} = 0$$

$x+1=0 \quad x=-1$ , $x^2=0 \quad x_{1,2}=0$ tanımsız

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| | $-\infty$ | ↗ | $-e^3$ | ↘ | $-\infty \;\|\|\; +\infty$ | ↘ | $y=0$ |




Örnek: $y = x^4 - 8x^2$ eğrisini çiziniz.

$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$x=0 \quad y=0 \qquad (0,0)$

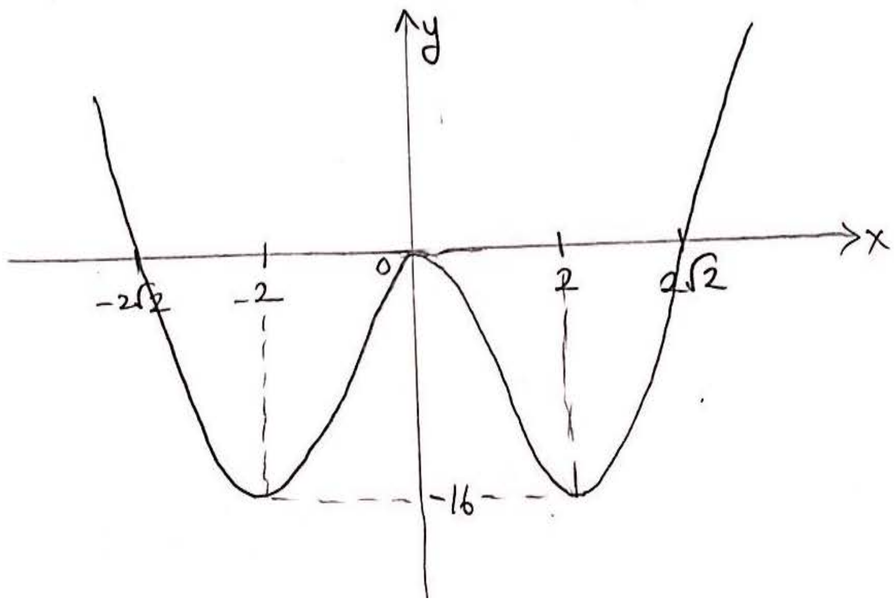
$y=0 \Rightarrow x_{1,2}=0 \quad x_3 = -2\sqrt{2} \;, \; x_4 = 2\sqrt{2}$

$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2-4) = 0 \qquad x=0 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

Asimptot yoktur.

$f(-x) = f(x)$ çift fonksiyon y-eks. göre simetrik.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{2}$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-16$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-16$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



Örnek: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$x=1$ $+\infty$ ve $-\infty$ kolda düşey asimptottur.

$\lim_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = \mp\infty$ olup yatay asimptot yok, eğri asimptot olabilir.

"Rasyonel fonksiyonlarda eğri (eğik) asimptot payı paydaya bölerek bulunur. Bölüm fonksiyonu eğri (eğik) asimptottur."

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x+1 \\ \hline x+1 & \\ -\ x-1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$y = x+1$ eğik asimptottur.

Eksenleri kesim noktalarını bulalım.

$x=0 \Rightarrow y=-1 \quad (0,-1)$

$y=0$ için x eksenini kesmez.

Ekstremumlar:

$$y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \qquad x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{2}$$

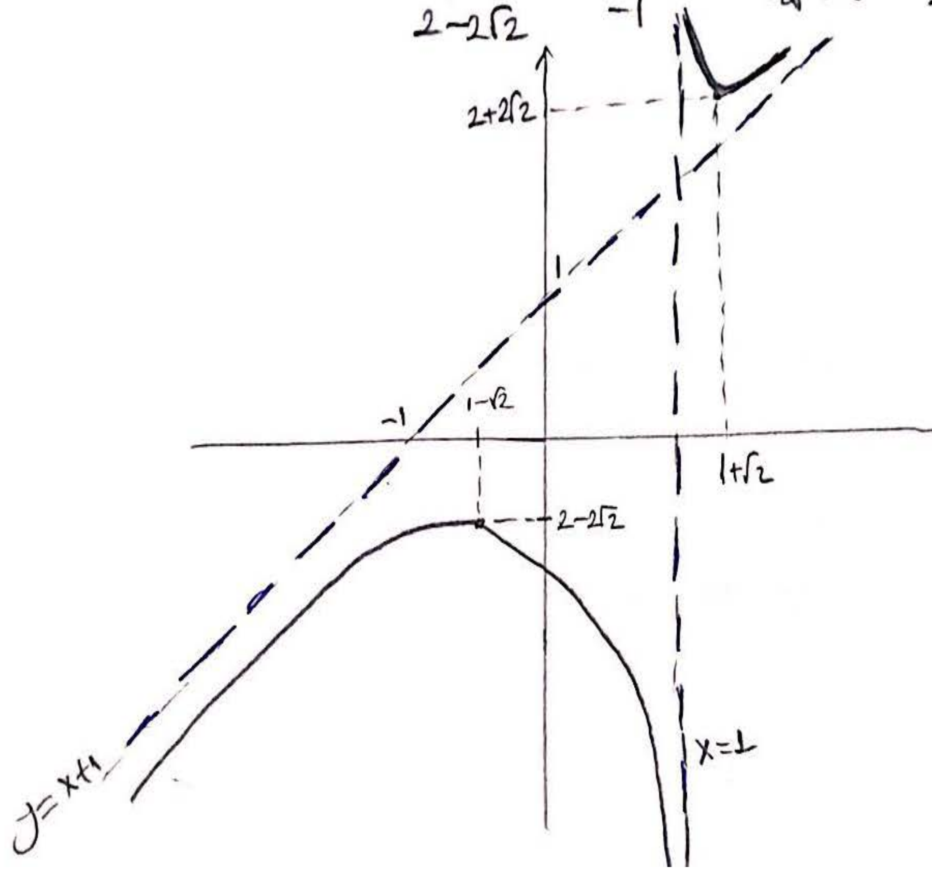
için

$y_{1,2} = 2 \mp \sqrt{2}$ bulunur.

$y'' = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0 > 0$ olup fonksiyon heryerde içbükeydir.

Tabloyu oluşturalım.

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2-2\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty \Vert +\infty$ | $\searrow$ | $2+2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



## Optimizasyon (Maksimum ve Minimum) Problemleri

Bu tarz problemleri çözmek için aşağıdaki adımları takip etmek kolaylık sağlar.

1.) Verilen problem dikkatlice okunarak verilenler ile optimizasyonu istenen nicelikler belirlenir. Eğer varsa verilenin tanım kümesi bulunur.
2) Bulunanlar probleme uygun bir şekil çizilerek şekil üzerinde gösterilir.
3) Verilen problemlerdeki nicelikler arasında denklemler yazılır. Birden fazla değişken söz konusu ise bunlar arasında bulunan denklemlerle ilişki kurularak değişken sayısı teke düşürülür.

4) Eğer tanım kümesi varsa uç noktalar ve kritik noktalarda fonksiyon değerlerine bakılır. Bunun için birinci türev, gerekirse ikinci türeve bakılır.

Örnek: Toplamları 40 olan iki pozitif tamsayının kareleri toplamı en fazla kaçtır?

Çözüm:

| I. sayı | II. sayı |
|---|---|
| $x$ | $40-x$ |

$$f(x) = x^2 + (40-x)^2 \quad , \quad 1 \le x \le 39$$

$$f'(x) = 2x + 2(40-x)(-1) = 0$$

$$4x - 80 = 0 \Rightarrow x = 20 \text{ kritik nokta.}$$

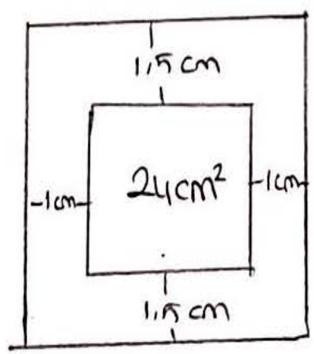
$f(1) = 1522$

$f(39) = 39^2 + 1^2 = 1522$ En büyük değeri 1522

$f(20) = 800$ En küçük " 800 olur

Örnek! Bir kağıdın 24 $cm^2$ lik kısmına yazı yazılacaktır. Alttan ve üstten 1,5 cm, sağdan ve soldan 1 cm boşluk bırakılacağına göre, bu kağıdın alanı en az kaç $cm^2$ dir?

Çözüm!




Yazı yazılacak kağıdın ebatları $x$ ve $y$ olsun.

Kağıdın alanı $= S$

$S = (x+2).(y+3)$ , $xy = 24$

$y = \frac{24}{x}$

$$S = S(x) = (x+2)\left(\frac{24}{x}+3\right) = 3x + \frac{48}{x} + 30$$

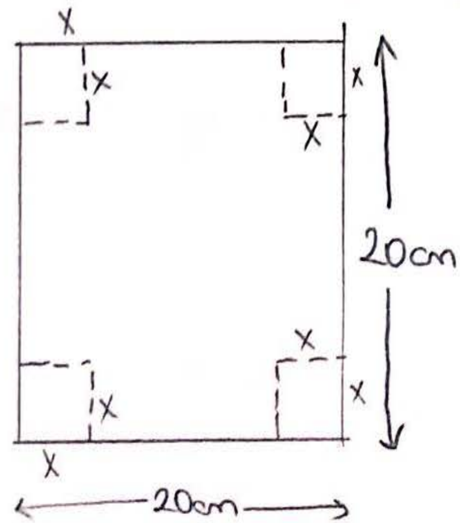
$$S'(x) = 3 - \frac{48}{x^2} = 0 \quad x^2 = 16 \Rightarrow x = \mp 4 \quad x > 0 \ \boxed{x=4}$$

| $x$ | | 4 | |
|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Kağıdın alanı en az
$S(4) = 54\ cm^2$ dir.

Örnek! 20 cm x 20cm ebatlarındaki bir levhadan, köşelerinden kareler kesilip katlanarak üstü açık bir kutu yapılacaktır. Kutunun hacminin maksimum olması için kesilen karelerin büyüklüğü ne olmalıdır?

Çözüm!



Levhanın kenarları 20 cm olduğundan fonksiyonun tanım kümesi $[0,10]$ olmalıdır.

Kutunun hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımı olduğundan

$$H(x) = x(20-2x)^2$$

dir.

$$H'(x) = (20-2x)^2 + 2x(20-2x)(-2)$$
$$= (20-2x)(20-6x) = 0$$

$\Rightarrow x = 10$ ve $x = \frac{10}{3}$ kritik noktalar.

Bu noktalar ve fonksiyonun uç noktalardaki değerleri.
$H(\frac{10}{3}) = 592 cm^3$, $H(10)=0$, $H(0)=0$ olup, en büyük hacmi $592 cm^3$ $x=\frac{10}{3}$ için sağlar.

Örnek: Dik silindir şeklinde $3m^3$ su alacak, üst kısmı açık olacak şekilde bir depo yapılacaktır. Deponun tabanında kullanılacak malzemenin $m^2$ si, yanal yüzeyinde kullanılacak malzemenin 2 katı fiyattadır. Deponun en ekonomik boyutlarını hesaplayınız.

Çözüm: Silindirin yarıçapı $r$, yüksekliği $h$ olsun.

Silindirin maliyetinin minimum olmasını istiyoruz.

$$V = \pi r^2 . h = 3m^3 \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$$

Taban alanı $= \pi r^2$

Yanal alanı $= 2\pi r . h$

Yanal alanda kullanılacak malzemenin maliyeti $a$ lira olsun.

O halde silindirin maliyeti

$$M = 2\pi r . h . a + 2a . \pi r^2 = 2\pi r . \frac{3}{\pi r^2} . a + 2a . \pi r^2$$